



دوره بالندگی مدرسان آموزش ریاضی کارشناسی ابتدایی  
دانشگاه فرهنگیان استان تهران

# توسعه تفکر جبری

مهدخت نقیبی

## تفاوت های تفکر جبری و حسابی

حساب	جبر
اشیاء اعداد هستند	اشیا حروف و عبارات هستند
علامت « = » به معنای محاسبه عبارت سمت چپ است	علامت « = » به معنای معادل بودن عبارات سمت راست و چپ است
با داده ها شروع شده و به سمت مجهولات پیش می رود	اولین قدم، توصیف روابط موجود در مسئله است، با مجهولات آغاز شده و ادامه می یابد
معادله، فرمولی برای محاسبه (تولید) یک عدد است (محاسبه مجهول)	معادله بیان کننده یک رابطه است ( رابطه بین متغیرها)
تاکید بر محاسبات متوالی است	تاکید بر برابری های متوالی است

## حل یک مسئله به روش حسابی و جبری

مثال: علی مقداری پول داشت. مادرش ۱۵۰۰ به او داد، او یک کتاب ۳۲۰۰ تومانی خرید و برایش ۲۳۰۰ تومان باقی ماند. قبل از این که مادرش به او پول بدهد او چقدر پول داشت؟

به روش حسابی:

$$۲۳۰۰ + ۳۲۰۰ = ۵۵۰۰$$

$$۵۵۰۰ - ۱۵۰۰ = ۴۰۰۰$$

$$\begin{aligned}x + 1500 &= 3200 + 2300 \\ \Rightarrow x &= 4000\end{aligned}$$

به روش جبری:

اگر  $x$  پول علی در ابتدا باشد:

## حل یک مسئله به روش حسابی

اگر نیما و مادرش روی هم ۶۰ سال سن داشته باشند و سن مادر سه برابر سن نیما باشد، سن هر یک چقدر است؟

سن نیما	سن مادر (سه برابر سن نیما)	مجموع سن هر دو
۵	$3 \times 5$	$5 + 15 = 20$ ❌
۱۰	$3 \times 10$	$10 + 30 = 40$ ❌
۲۰	$3 \times 20$	$20 + 60 = 80$ ❌
۱۲	$3 \times 12$	$12 + 36 = 48$ ❌
۱۵	$3 \times 15$	$15 + 45 = 60$ ✅

برخی از مشکلات دانش‌آموزان در توسعه تفکر جبری

## - عدم تشخیص خاصیت عمل‌ها:

مثال: مقدار  را در عبارت زیر بیابید.

$$(235 + \text{□}) + (679 - 122) = 235 + 679$$

اکثر دانش آموزان ششم تنها با اعداد کوچکتر قادر به پاسخ گویی این مسئله هستند، چون تنها روشی که از آن استفاده می‌کنند محاسبه است. (Collis 1974, 1975 نقل شده در Grouws).

- عدم درک تساوی جبری و عدم توانایی در استفاده از خاصیت‌هایی مثل جابه‌جایی در جمع:

مثال: بدون جمع کردن سه جمله بگویید کدام یک از عبارت‌های زیر با هم برابرند:

$$۶۸۵ - ۴۹۲ + ۹۴۷$$

$$۹۴۷ + ۴۹۲ - ۶۸۵$$

$$۹۴۷ - ۶۸۵ + ۴۹۲$$

دانش آموزان (کلاس ششم) قادر به تشخیص معادل بودن دو عبارت عددی، بدون محاسبه نبودند. آنان برای تصمیم‌گیری در مورد تساوی عبارت‌های عددی، ترجیح می‌دادند دست به محاسبه عددی بزنند. ( Chaiklin & Lesgold 1981 نقل شده در Grouws )

از تفکر حسابی به سوی تفکر جبری

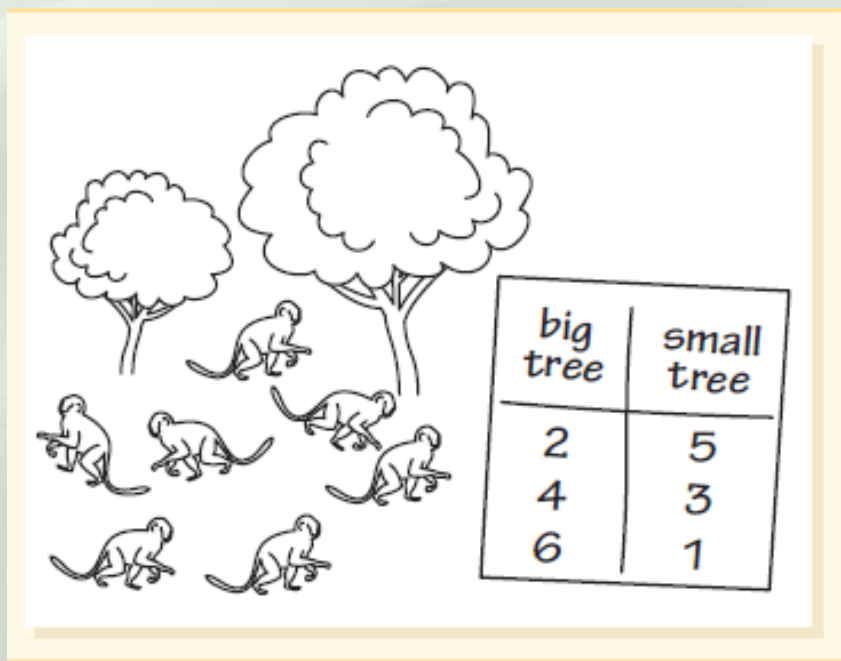


## رویکردهای تفکر جبری ( کپوت ۲۰۰۸ )

- جبر به مثابه مطالعه ساختارهایی در سیستم عددی که از دل حساب بیرون می‌آید  
(جبر به عنوان تعمیم حساب)
  - جبر به مثابه مطالعه الگوها، روابط، توابع
  - جبر به مثابه شاخه‌ای از مدل‌سازی ریاضی شامل استفاده معنا دار از نمادها
- هر سه رویکرد روی مفاهیم اصلی «تعمیم» و «نمادسازی» متمرکز هستند.

## تعمیم دادن به کمک حساب

فرآیند تعمیم دادن از عدد و حساب از سال‌های پیش دبستانی شروع می‌شود و تا زمانی که بچه‌ها تمامی جنبه‌های عددی و محاسباتی شامل حقایق اساسی و معانی عملیات را یاد می‌گیرند ادامه پیدا می‌کند.



فعالیت  
خانم پندی

- تعمیم به کمک جدول صدتایی

- تعمیم به کمک عملیات:

روش‌های تجزیه عدد ۷ (جمع ترکیبی عدد ۷)

درک تعمیم ویژگی‌ها: اگر تعداد میمون روی یک

درخت زیاد شود، تعداد آن‌ها روی درخت دیگر باید کم شود ← کمک به انتزاع

## تعمیم دادن به کمک عملیات (ادامه)

تمام حالت‌های ممکن که میمون‌ها روی دو درخت بازی می‌کنند را پیدا کنید.  
سوال: کی بفهمیم تمامی حالت‌های ممکن را پیدا کردیم؟

- ۱- نوشتن تمامی حالت‌های ممکن تا جایی که نتوان حالت دیگری پیدا کرد.
- ۲- نوشتن یک به یک اعداد از ۰ تا ۷ برای یک درخت و عدد متناظر آن برای درخت دیگر.
- ۳- بدون نوشتن، رسیدن به این نکته که برای هر عدد از ۰ تا ۷، یک حالت وجود دارد.
- ۴- همیشه تعداد حالت‌ها یکی بیشتر از تعداد میمون‌ها است.  $(n+1)$

## تعمیم دادن به کمک عملیات (ادامه)

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 49 \\ \hline \end{array}$$

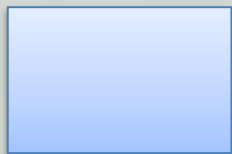
چگونگی انتخاب مسائل حساب، فرصت هایی  
برای تعمیم دادن به وجود می آورد:

درست یا غلط؟

- اگر عددی را ضرب کنیم، حاصل عددی زوج است.
- اگر عددی در ۹ ضرب شود، جمع ارقام آن مضربی از ۹ است.

کشف موقعیت های عددی به جای تنها

محاسبه کردن، روشی موثر برای فهم قوی تر  
سیستم عددی و تفکر جبری است:



اگر یکی از عوامل ضرب ۲ برابر شود، حاصل ضرب هم  
۲ برابر می شود (دانش آموزان پایه سوم دبستان)

## استفاده معنادار از نمادها

- معنی علامت تساوی جبری

- معنی متغیر

استفاده معنادار از نمادها: معنی علامت تساوی

$$8 + 4 = \square + 5$$

$$8 + 4 = 12 + 5 = 17$$

?

## استفاده معنادار از نمادها: معنی علامت تساوی (ادامه)

انجام یک فعالیت:

10 + 1    10 + 2    10 + 3

10 + 4    10 + 5

10 + 6    10 + 7    10 + 8

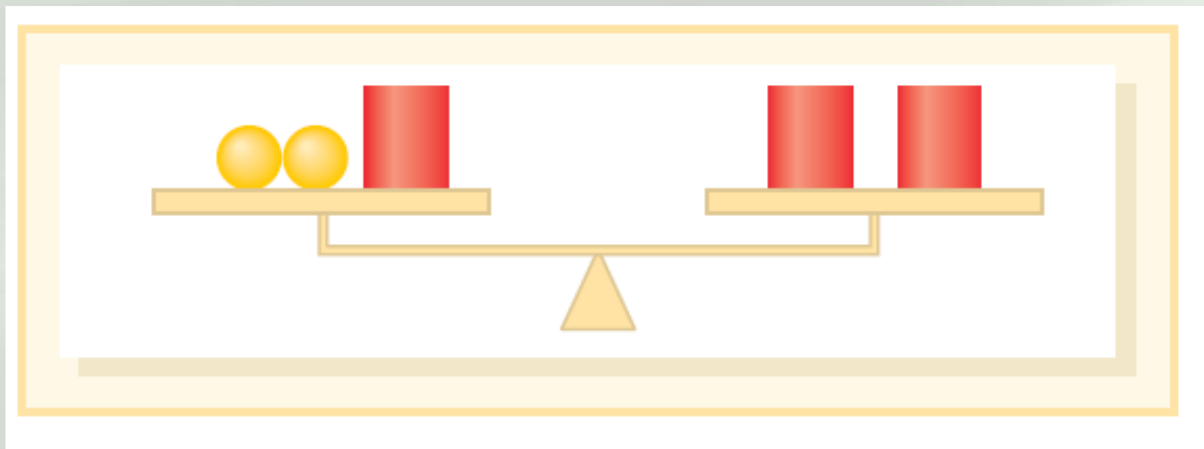
## مفهومی کردن علامت تساوی

- با استفاده از ترازو
- با استفاده از عبارت های درست- نادرست
- با استفاده از عبارت با جمله ی مجهول



# مفهومی کردن علامت تساوی

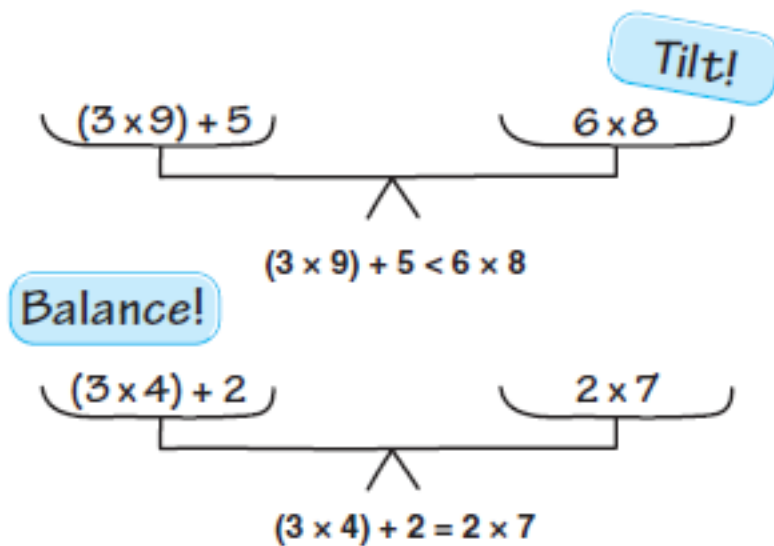
- با استفاده از ترازو



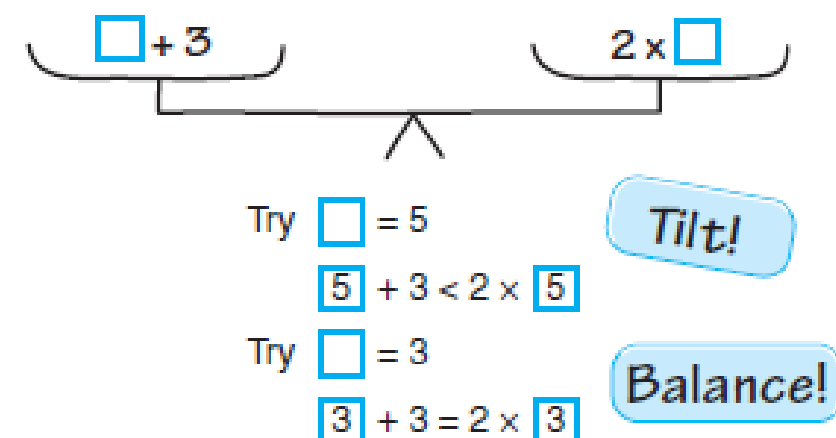
وزن استوانه های قرمز با هم برابر و وزن توپ های زرد نیز با هم برابر است. چگونه می توان وزن استوانه و توپ را با هم مقایسه کرد؟

## مفهومی کردن علامت تساوی

(a)



(b)



## مفهومی کردن علامت تساوی

- با استفاده از عبارت های درست- نادرست

سری ب

$$3 + 9 = 9 + 3$$

$$10 - 3 = 11 - 4$$

$$3 + 9 = 0 + 13$$

$$4 \times 15 = 2 \times 20$$

سری الف

$$17 - 5 = 12$$

$$6 + 9 = 16$$

$$11 = 3 + 8$$

$$23 = 23$$

$$4 \times 9 = 34$$

## مفهومی کردن علامت تساوی

- با استفاده از عبارت با جمله‌ی مجهول

$$8 + 4 = \square + 10$$

$$\square + \square + 7 = \square + 17$$

$$7 + 9 = 8 + \square$$

$$8 + 4 = 4 \times \square$$

$$2 + \square = (3 + \square) \times 4$$

## یک تجربه تدریس: توسعه مفهومی علامت مساوی از حسابی به سمت جبری (کایران ۱۹۸۱)

۱- پرسش در مورد معنای علامت مساوی از دانش آموزان و استفاده از آن با ارائه یک مثال

۲- ساخت تساوی حسابی، با یک عمل در هر طرف

$$2 \times 6 = 10 + 2 \quad \text{یا} \quad 2 \times 6 = 4 \times 3$$

۳- ساخت تساوی حسابی با دو یا چندین عمل در هر طرف

$$7 \times 2 = 5 \times 3 - 1$$

۴- استفاده از یک تساوی حسابی و پوشاندن یکی از اعداد آن ابتدا با ....

$$7 \times 3 = 2 \times 10 + 1 \quad \longrightarrow \quad 7 \times \boxed{\phantom{00}} = 2 \times 10 + 1$$

$$7 \times 2 = 5 \times 2 + 4 \quad \longrightarrow \quad 7 \times \boxed{\phantom{00}} = 5 \times \boxed{\phantom{00}} + 4$$

برای توصیف  $7 \times \blacksquare = 5 \times \blacksquare + 4$ :

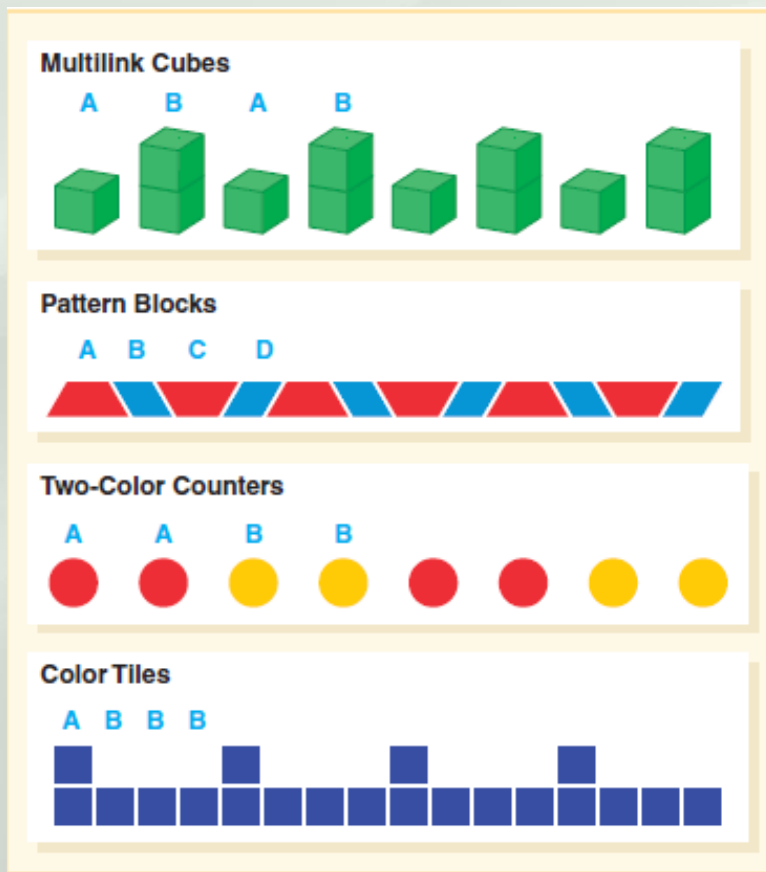
« عددی است که اگر آن را ۵ برابر کرده و با ۴ جمع کنم، مثل آن است که (همان جواب را به دست می‌آید که اگر) همان عدد را ضرب در ۷ کنم »

# مطالعه الگوها و تابعها

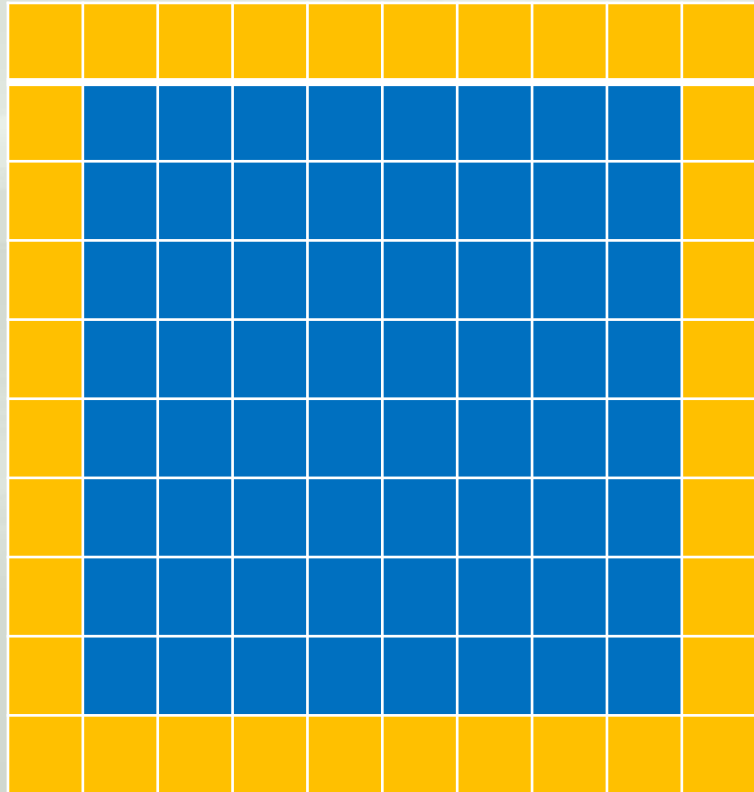
## - الگوهای تکرار شونده:

برای توسعه الگوهای تکرار شونده،  
شناسایی « قسمت تکرار شونده » ضروری است.

توصیف کردن و توسعه الگوها نوعی ریاضی ورزی  
و تفکری جبر گونه است.



## کشف یک الگو



به چند روش مختلف می‌توان تعداد کاشی‌های زرد دور این استخر  $8 \times 8$  را بدون شمارش همه کاشی‌ها به دست آورد؟

$$4 \times 9$$

$$4 \times 8 + 4$$

$$4 \times 10 - 4$$

$$2 \times 10 + 2 \times 8$$

$$100 - 64$$

.....



حال همین مسئله را برای زمینی به ابعاد  $3 \times 3$  ،  $4 \times 4$  ،  $5 \times 5$  و .... پیدا می کنیم. مثلاً :

برای زمین  $3 \times 3$  :  $4 \times 4$

برای زمین  $4 \times 4$  :  $4 \times 5$

برای زمین  $5 \times 5$  :  $4 \times 6$

....

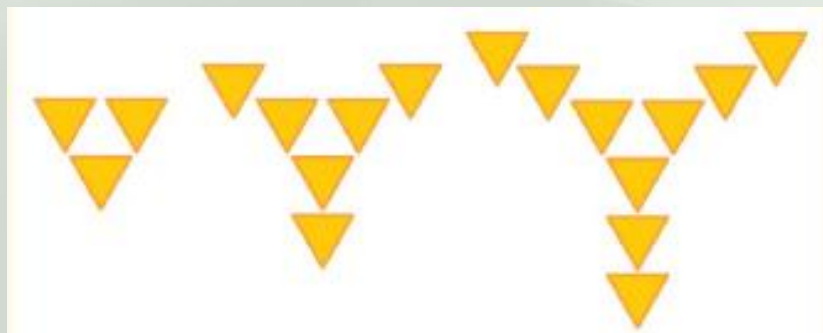
برای زمین  $20 \times 20$  :  $4 \times 21$

....

پس کاشی های زرد دور استخر .....

## - الگوهای بزرگ‌شونده:

در کار با این الگوها، دانش آموز نه تنها « هسته الگو » را شناسایی می کند و الگو را توسعه می دهد بلکه به دنبال تعمیم و یافتن یک رابطه جبری است که بتواند در هر مرحله مشخص کند چه الگویی خواهد داشت.



با توجه به شکل روبه‌رو، جدول زیر را که تعداد مثلث ها را در هر مرحله نشان می دهد کامل کنید.  
در مرحله ۱۰ چند مثلث خواهیم داشت؟



۱- محیط مربع چگونه به دست می آید؟

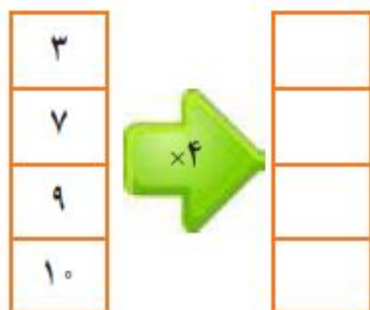
= محیط مربع

۲- جدول زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۳	۷	۹	۱۰	۵	۲
محیط مربع	۱۲	۲۸				



حالا جدول بالا را با ماشین ورودی و خروجی زیر مقایسه کنید. چه ارتباطی با هم دارند؟ توضیح دهید.




زیر ستون سمت چپ چه کلمه ای می نویسید؟  
زیر ستون سمت راست چه کلمه ای می نویسید؟

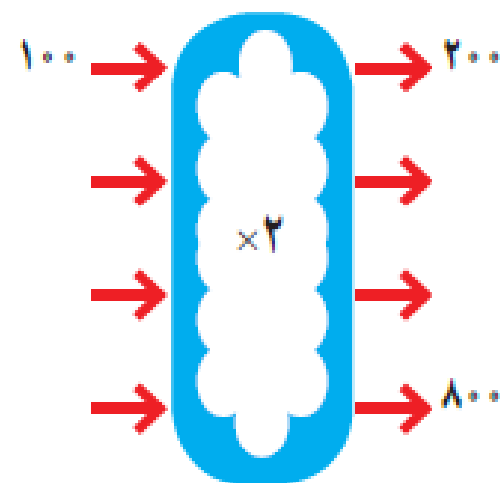
کلاس چهارم دبستان ص ۱۳

# تابع

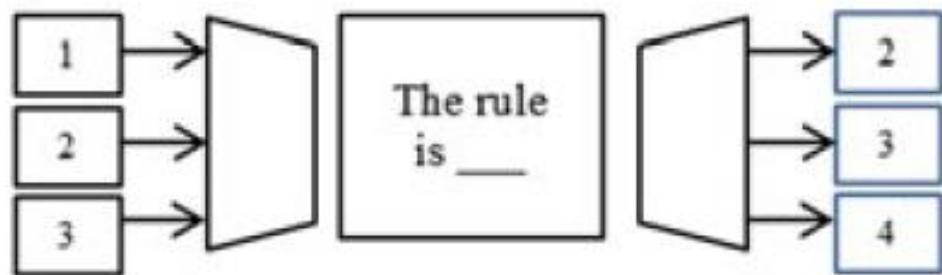
۱- اگر بول ظاهره دو برابر بول غزل باشد، جدول را کامل کنید. سپس با توجه به اطلاعات جدول، ماشین ورودی - خروجی مشابه آن را کامل کنید.



بول غزل	بول ظاهره
۱۰۰	۲۰۰
۲۰۰	
۳۰۰	
	۸۰۰



کلاس چهارم دبستان ص ۱۵

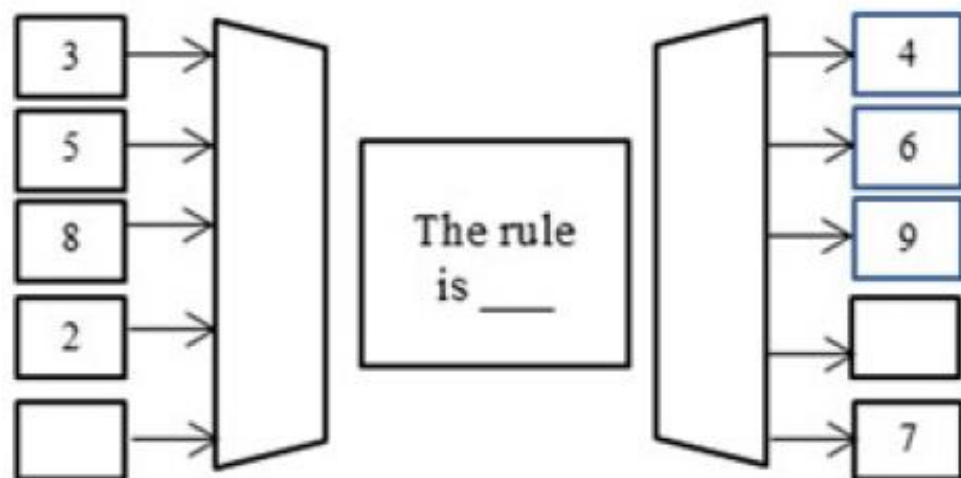


The rule is

$+ 1$

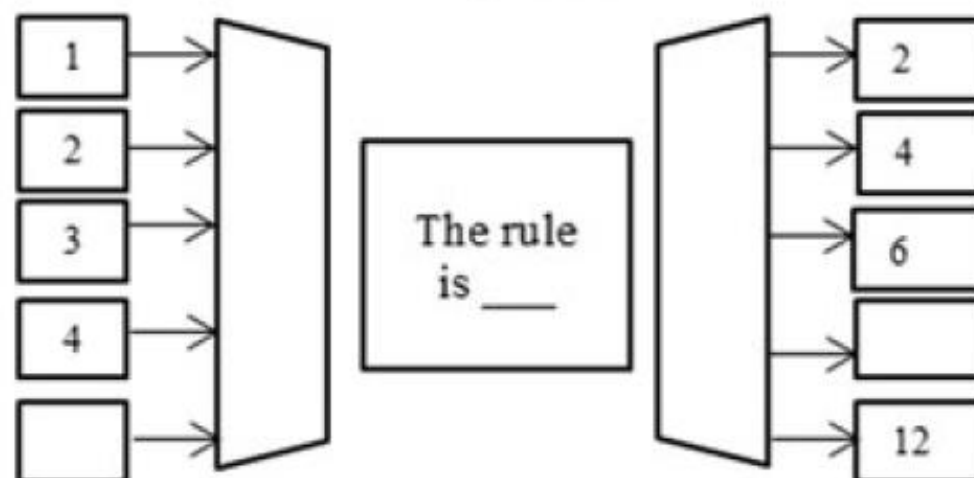
Write the missing numbers in the boxes.

Item A



The rule is

Item B



The rule is

## منابع:

- استیسی، کی؛ اصغری، امیرحسین (۱۳۸۸). گذر از تفکر جبری به حسابی. رشد آموزش ریاضی، شماره ۹۵، ص ۴-۱۱.
- کایرن، کارولین (۲۰۱۶). کلیدی برای رشد تفکر جبری: جستجو، استفاده و بیان کردن ساختار (۱۳۹۶). امیر حسین اصغری، شراره تقی دستجردی.
- ریاضی چهارم دبستان (۱۳۹۶). گروه مولفان، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
- Kieran, C. (Ed.). (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.
- Van De Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2013). (8th Edition). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, , Boston: Pearson.
- Grows, D. A. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. NC: MAcMILLAN.
- Lester, F. K., Jr., (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* . Charlotte, NC: Information Age.